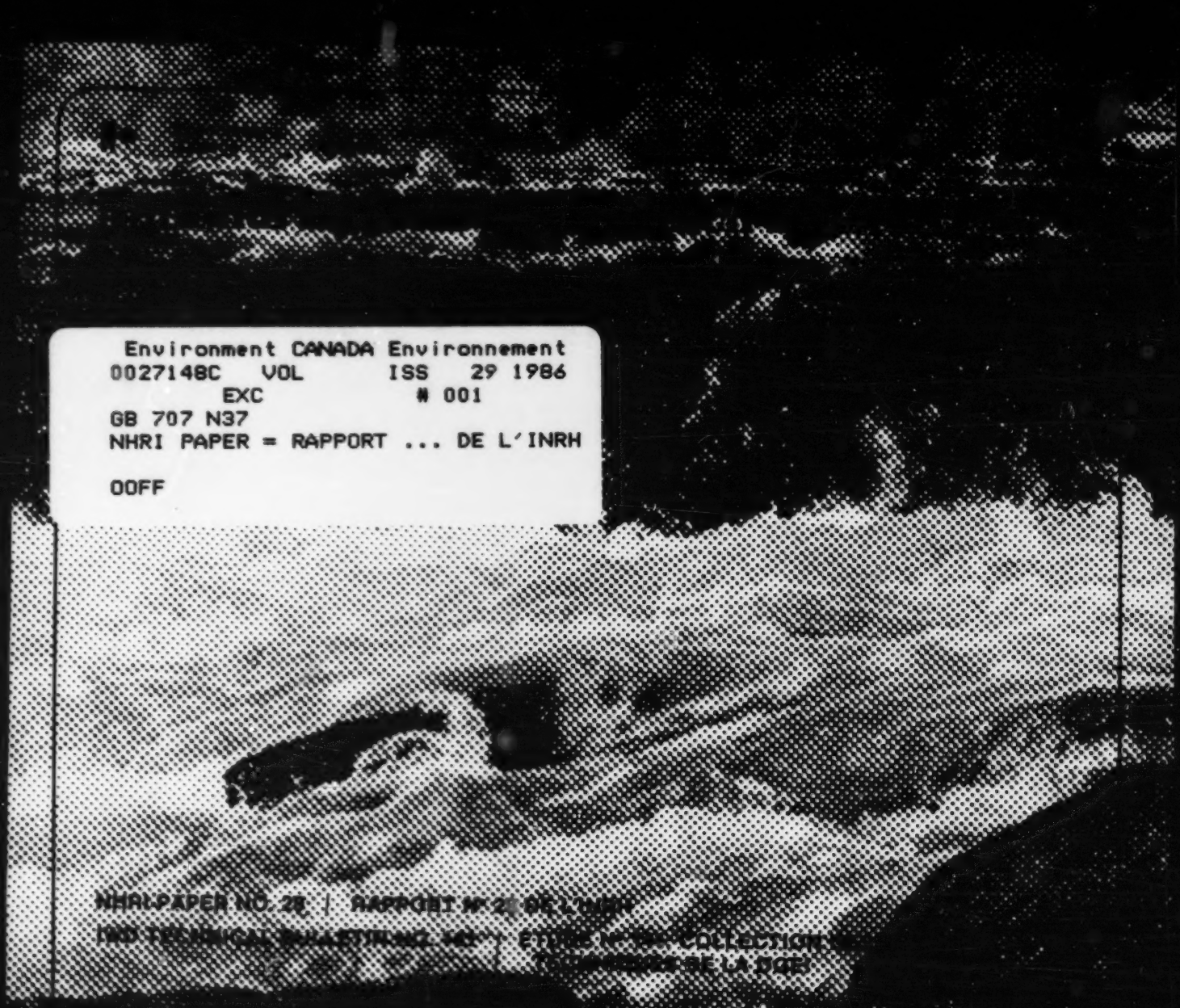
Environment CANADA Environnement
0027148C VOL ISS 29 1986
EXC # 001
GB 707 N37
NHRI PAPER = RAPPORT ... DE L'INRH

OOFF



Environment Canada Environnement Canada

National Hydrology Research Institute
Institut national de recherches en hydrologie

NHRI PAPER NO. 29 / RAPPORT Nº 29 DE L'INRH
IWD TECHNICAL BULLETIN NO. 141 / ÉTUDE Nº 141, COLLECTION DES RAPPORTS TECHNIQUES DE LA DGEI

Recursion Formula for Unit Hydrographs
Relation de récurrence pour les hydrogrammes unitaires

B.P. Sangal

NATIONAL HYDROLOGY RESEARCH INSTITUTE
INLAND WATERS DIRECTORATE
OTTAWA, CANADA, 1986

NHRI·INRH

INSTITUT NATIONAL DE RECHERCHES EN HYDROLOGIE
DIRECTION GÉNÉRALE DES EAUX INTÉRIEURES
OTTAWA, CANADA, 1986

86-031277

© Minister of Supply and Services Canada 1986

Cat. No. En 36-503/141

ISBN 0-662-54358-0

© Ministre des Approvisionnements et Services Canada 1986

Nº de cat. En 36-503/141

ISBN 0-662-54358-0

Contents

	Page
ABSTRACT	v
RÉSUMÉ	v
INTRODUCTION	1
THEORY	2
DERIVATION OF LONG DURATION UH FROM SHORT DURATION UH	4
DERIVATION OF SHORT DURATION UH FROM LONG DURATION UH	5
EXAMPLES	5
CONCLUSION	9
ACKNOWLEDGMENTS	9
REFERENCES	10
APPENDIX A. Composite hydrograph	11
APPENDIX B. Elimination of oscillations in S-hydrograph and derived UH	12

Table des matières

	Page
RÉSUMÉ	v
ABSTRACT	v
INTRODUCTION	1
THÉORIE	2
ÉTIREMENT DE LA PÉRIODE DE L'HYDROGRAMME UNITAIRE	4
COMPRESSION DE LA PÉRIODE DE L'HYDROGRAMME UNITAIRE	5
EXEMPLES	5
CONCLUSION	9
REMERCIEMENTS	9
RÉFÉRENCES	10
ANNEXE A. Hydrogramme composé	11
ANNEXE B. Élimination des oscillations de l'hydrogramme en S et de l'hydrogramme unitaire dérivé	12

Tables

1.	Sample data on unit hydrographs and S-hydrograph	6
2.	Derivation of 6-hr UH from 1-hr UH	7
3.	Derivation of 2-hr UH from 6-hr UH	7
4.	Derivation of short duration UH from long duration UH	8
B-1.	Elimination of oscillations in S-hydrograph and derived UH	14

Tableaux

1.	Données tirées d'hydrogrammes unitaires et de l'hydrogramme en S	6
2.	Obtention d'un HU_{6h} à partir d'un HU_{1h}	7
3.	Obtention d'un HU_{2h} à partir d'un HU_{6h}	7
4.	Compression de la période de l'hydrogramme unitaire	8
B-1.	Élimination des oscillations de l'hydrogramme en S et de l'hydrogramme unitaire dérivé	14

Illustrations

Page

Figure 1. Derivation of T-hr unit hydrograph from a t-hr unit hydrograph. 3

Figure 2. Application of the S-hydrograph method . 3

Figure 3. Fluctuating S-hydrograph, fluctuating UH and adjusted UH 3

Figure 4. Fluctuating UH adjusted by Sangal's method 3

Illustrations

Page

Figure 1. Obtention de l'hydrogramme unitaire de T (h) à partir de l'hydrogramme unitaire de t (h) 3

Figure 2. Application de la méthode de l'hydrogramme en S. 3

Figure 3. Fluctuation de l'hydrogramme en S, fluctuation et réglage de HU 3

Figure 4. Fluctuation de HU et réglage par la méthode de Sangal. 3

Abstract

A recursion formula has been derived which can be used for converting unit hydrographs either from short duration to long duration or from long duration to short duration. Thus, an alternative to developing an S-hydrograph for this purpose is proposed. Examples on the use of the formula have been provided. A technique has also been suggested to eliminate oscillations in the S-hydrograph and derived unit hydrograph.

Key words: Hydrograph; Hydrology; S-Hydrograph; Unit Hydrograph; Unitgraph.

Résumé

Une relation de récurrence permet désormais de comprimer ou d'étirer la période des hydrogrammes unitaires. On la propose donc à la place de l'hydrogramme en S. Des exemples d'emploi sont donnés. On propose aussi une technique pour éliminer les oscillations de l'hydrogramme en S et de l'hydrogramme unitaire dérivé.

Mots clés : Hydrogramme, hydrologie, hydrogramme en S, hydrogramme unitaire.

Recursion Formula for Unit Hydrographs
Relation de récurrence pour les hydrogrammes unitaires

B.P. Sangal

INTRODUCTION

Sherman (1932) proposed the well-known unit hydrograph (UH) theory. The UH (originally named Unitgraph) of a drainage basin is defined as a hydrograph of direct runoff resulting from 1 in. (25.4 mm) of effective rainfall. The UH theory is based on the following assumptions (Chow, 1964):

(1) The effective rainfall is uniformly distributed within its duration or specified period of time.

(2) The effective rainfall is uniformly distributed over the whole basin.

(3) The base of the hydrograph of direct runoff owing to an effective rainfall of unit duration is constant.

(4) The ordinates of direct runoff hydrographs of a common base time are directly proportional to the total amount of direct runoff represented by each hydrograph. This is also called the principle of linearity.

(5) For a given drainage basin, the hydrograph of runoff owing to a given period of rainfall reflects all the combined physical characteristics of the basin.

Under natural conditions, the primary assumptions of effective rainfall being uniform in both space and time cannot be satisfied perfectly. The effect of physiographic characteristics of the basin, channel and basin storage, man-made structures, rainfall patterns, all tend to distort the ideal conditions. The UH, however, has proved a very useful tool in engineering hydrology. If applied judiciously it can give reliable results.

From the assumptions inherent in the UH theory, it is clear that the unit duration of effective rainfall is an

INTRODUCTION

Sherman (1932) est l'auteur de la théorie bien connue de l'hydrogramme unitaire (HU). L'hydrogramme unitaire d'un bassin versant se définit comme l'hydrogramme de ruissellement direct obtenu à partir d'une averse réelle d'une hauteur de 1 po (25.4 mm). La théorie repose sur les hypothèses suivantes (Chow, 1964) :

(1) L'averse réelle est uniformément répartie en durée ou durant une période de temps déterminée.

(2) Elle est uniformément répartie sur tout le bassin.

(3) La base de l'hydrogramme du ruissellement direct consécutif à une averse réelle de durée unitaire (averse unitaire) est constante.

(4) Les ordonnées d'hydrogrammes du ruissellement direct à temps de base de même durée sont directement proportionnelles à la quantité totale du ruissellement direct représenté par chaque hydrogramme. En d'autres termes, c'est le principe de linéarité.

(5) Dans un bassin versant donné, l'hydrogramme du ruissellement dû à une averse de période donnée traduit l'ensemble des caractéristiques physiques du bassin.

Dans les conditions naturelles, les hypothèses fondamentales de l'uniformité, à la fois dans l'espace et dans le temps de l'averse réelle, ne peuvent pas être confirmées parfaitement. Les caractéristiques physiographiques du bassin, l'emmagasinement dans les chenaux et le bassin, les ouvrages faits de main d'homme, la répartition des averses, tous ces facteurs tendent à provoquer un écart des conditions idéales. Cependant, l'hydrogramme unitaire s'est révélé très utile en hydrologie de l'ingénieur. Il peut donner des résultats fiables, si on l'utilise à bon escient.

Étant donné les hypothèses fondamentales de la théorie, il est évident que la durée unitaire de l'averse

extremely important parameter. Owing to changing characteristics of storms, it is frequently necessary to derive the UH of one duration from another. The process is simple if a long duration UH is to be derived from one of short duration, as the principle of superposition or lag-and-add can be applied if the long duration is an integral multiple of the short duration. However, if a short duration UH is to be derived from one of long duration, or if the long duration is not an integral multiple of the short duration, then the same method cannot be applied. Recourse is then made to the S-hydrograph method which can be applied to UH of any duration. The S-hydrograph method is rather cumbersome if calculations must be done manually. In this paper a simple formula which can be used for converting UH to either a shorter or longer duration has been derived.

réelle constitue un paramètre très important. À cause des caractéristiques fluctuantes des orages, il est souvent nécessaire d'obtenir un hydrogramme unitaire d'une durée donnée à partir d'un hydrogramme qui correspond à une autre durée. L'opération est simple si c'est un hydrogramme correspondant à une durée longue (T) qui doit être dérivé d'un hydrogramme à durée courte (t), car le principe de superposition ou de sommation-décalage à l'origine peut s'appliquer si T est un multiple de t. Cependant, si un hydrogramme correspondant à une durée courte (qu'on note HU_t) doit être obtenu d'un hydrogramme correspondant à une durée longue (HU_T) ou si T n'est pas un multiple de t, la méthode ne peut s'appliquer. On recourt alors à l'hydrogramme en S qui peut s'appliquer à un hydrogramme unitaire de quelque durée que ce soit. La méthode de l'hydrogramme en S se révèle assez lourde si les calculs doivent être faits à la main. Nous proposons ici une relation simple qui permet de comprimer ou d'étirer la période d'un hydrogramme unitaire.

THEORY

Let us consider Figure 1. Suppose it is required that a T-hr UH be derived from a given t-hr UH. From the conventional approach of lag-and-add, it is known that if a 2-hr UH is to be derived from a 1-hr UH, the number of hydrographs to be added together is 2. Similarly, if a 3-hr UH is to be derived from a 1-hr UH, then the number of hydrographs to be added together is 3 and so on. Therefore, if a T-hr UH is to be derived from a t-hr UH where $T > t$, then the number of hydrographs to be added together is T/t. Let this ratio be equal to R which is an integer. It is assumed that T is an integral multiple of t. The case in which T/t is not an integer will be discussed later. Let U be the ordinates of the t-hr UH, V the ordinates of T-hr UH, and Q the ordinates of the summation hydrograph obtained by lagging-and-adding the t-hr unit hydrographs whose number is R. By the very definition, Q = RV. In Figure 1, R = 4, since T = 4 and t = 1. Thus we have:

$$Q_0 = U_0$$

$$Q_1 = U_1 + U_0$$

$$Q_2 = U_2 + U_1 + U_0$$

$$Q_{n-1} = U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots U_{n-R+1} + U_{n-R} \qquad (1)$$

$$Q_n = U_n + U_{n-1} + \ldots + U_{n-R+1} \qquad (2)$$

Subtracting Equation 1 from Equation 2, we have

$$Q_n - Q_{n-1} = U_n - U_{n-R} \qquad (3)$$

THÉORIE

Examinons la figure 1. Supposons qu'il faille dériver un HU_T d'un HU_t. La méthode traditionnelle de sommation-décalage à l'origine permet d'affirmer que si un hydrogramme correspondant à une durée de deux heures (HU_{2h}) doit être tiré d'un HU_{1h}, le nombre d'hydrogrammes à sommer est de 2. De même, si T = 3 h et t = 1 h, le nombre d'hydrogrammes à sommer est de 3, ainsi de suite. Par conséquent, si un HU_T doit être dérivé d'un HU_t, $T > t$, alors le nombre d'hydrogrammes à sommer est de T/t. Posons ce quotient égal à R, nombre entier. T est donc multiple de t. Le cas de T/t non égal à un entier sera discuté plus loin. Soient U les ordonnées de HU_t; V, les ordonnées de HU_T et Q, les ordonnées de l'hydrogramme obtenu par sommation des R HU_t décalés. Par définition, Q = RV. Dans la figure 1, R = 4 puisque T = 4 et t = 1. Ainsi nous avons :

$$Q_0 = U_0$$

$$Q_1 = U_1 + U_0$$

$$Q_2 = U_2 + U_1 + U_0$$

$$Q_{n-1} = U_{n-1} + U_{n-2} + \ldots U_{n-R+1} + U_{n-R} \qquad (1)$$

$$Q_n = U_n + U_{n-1} + \ldots + U_{n-R+1} \qquad (2)$$

En soustrayant l'équation 1 de l'équation 2, nous obtenons :

$$Q_n - Q_{n-1} = U_n - U_{n-R} \qquad (3)$$

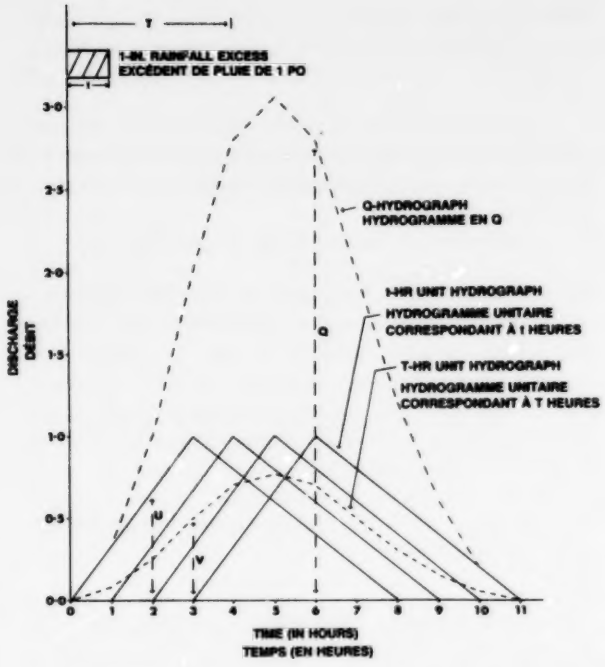


Figure 1. Derivation of *T*-hr unit hydrograph from a t-hr unit hydrograph/Obtention de l'hydrogramme unitaire de T (h) à partir de l'hydrogramme unitaire de t (h).

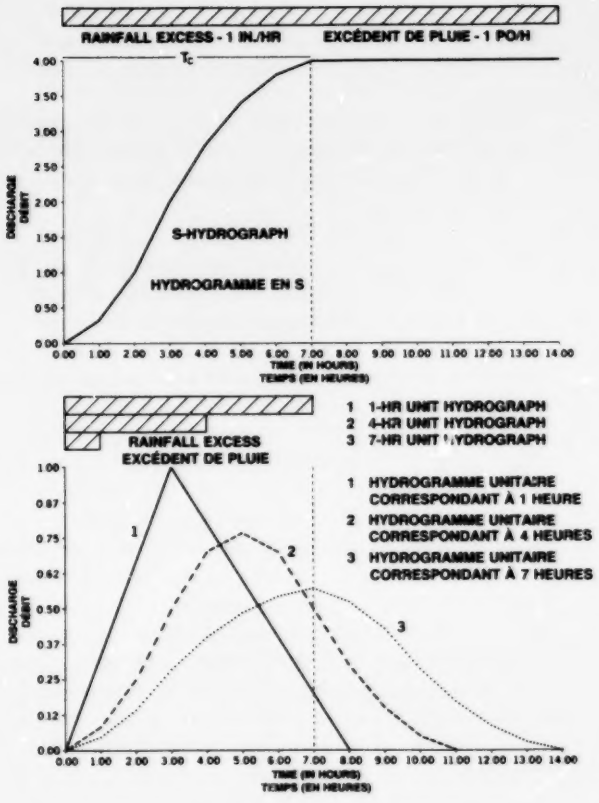


Figure 2. Application of the S-hydrograph method/Application de la méthode de l'hydrogramme en S.

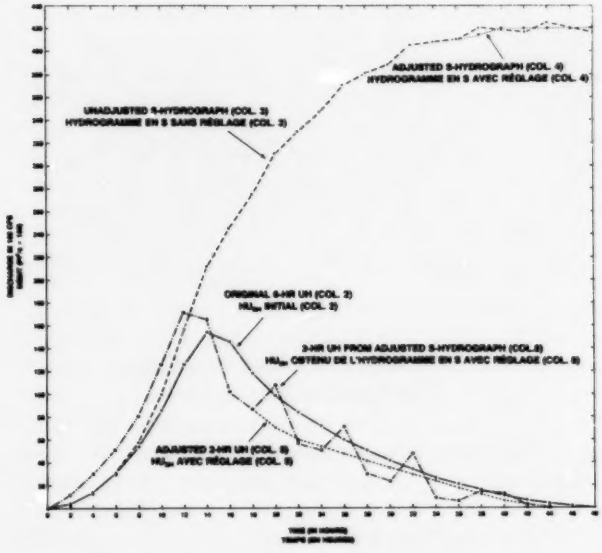


Figure 3. Fluctuating S-hydrograph, fluctuating UH and adjusted UH. Refer to Table 4 for column numbers/Fluctuation de l'hydrogramme en S, fluctuation et réglage de HU. Se référer au tableau 4 pour les numéros des colonnes.

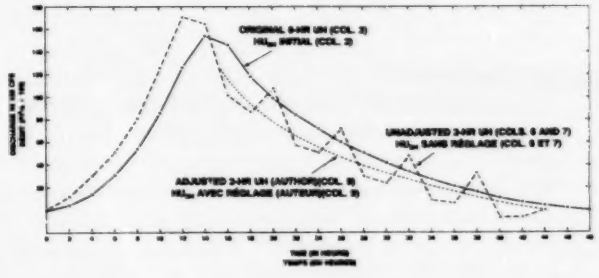


Figure 4. Fluctuating UH adjusted by Sangal's method. Refer to Table 4 for column numbers/Fluctuation de HU et réglage par la méthode de Sangal. Se référer au tableau 4 pour les numéros des colonnes.

or

$$R(V_n - V_{n-1}) = U_n - U_{n-R} \quad (4)$$

Equation 4 is the basic recursion formula which can be used for deriving UH from any duration to any duration — short to long or long to short. The following points are to be emphasized:

(1) R is always the ratio of long duration to short duration (T/t), whether the derivation is from short duration to long duration or vice versa.

(2) T is always the long duration and t is always the short duration.

(3) V and U are the T-hr and t-hr UH ordinates, respectively.

(4) Intervals n are always in terms of t, the short duration.

(5) Derivation of the long duration UH simply requires the determination of V when R and U are known, and derivation of the short duration UH requires the determination of U when R and V are known.

Initially, if T is not an integral multiple of t, then intermediate conversions will be required. For example, to derive a 2-hr UH from a 3-hr UH, first it may be necessary to derive a 1-hr UH from the 3-hr UH (R = 3) and then the 2-hr UH from the 1-hr UH (R = 2). This derivation involves one intermediate conversion. If a 3/4-hr UH is to be derived from a 2/5-hr UH, then first it may be necessary to derive a 2-hr UH from the 2/5-hr UH (R = 5), then a 1/4-hr UH from the 2-hr UH (R = 8) and finally the 3/4-hr UH from the 1/4-hr UH (R = 3). This derivation requires two intermediate conversions, which is the maximum number of conversions required for deriving UH from any duration to any duration. Obviously, there are a number of ways in which these conversions can be carried out.

DERIVATION OF LONG DURATION UH FROM SHORT DURATION UH

Rearranging the terms in Equation 4, we have

$$V_n = (U_n - U_{n-R})/R + V_{n-1} \quad (5)$$

Both U and V ordinates are zero in the beginning and at the end of their respective base lengths given by $T_c + t$ and $T_c + T$, where T_c is the time of concentration. The value of T_c (7 hr in Fig. 1) can be obtained from the known base length of the t-hr UH. From the known values of U and R, the V

ou

$$R(V_n - V_{n-1}) = U_n - U_{n-R} \quad (4)$$

L'équation 4 est la relation fondamentale de récurrence qui peut servir à comprimer ou à étirer la période de tout hydrogramme unitaire. Les points suivants sont à souligner :

(1) R est toujours le rapport de la période longue à la courte (T/t), qu'il y ait compression ou étirement de la période.

(2) T correspond toujours à la période longue, t à la période courte.

(3) V et U sont les ordonnées de HU_T et de HU_t respectivement.

(4) Les intervalles n sont toujours exprimés en fonction de t, la période courte.

(5) Pour obtenir HU_T, il suffit de déterminer V lorsque R et U sont connus; pour obtenir HU_t, il faut déterminer U lorsque R et V sont connus.

Au départ, si T n'est pas un multiple de t, alors il faut passer par des transformations intermédiaires. Par exemple, pour dériver un HU_{2h} d'un HU_{3h}, il faut d'abord dériver HU_{1h} de HU_{3h} (R = 3), puis HU_{2h} de HU_{1h} (R = 2). Il n'y a qu'une étape intermédiaire. Pour obtenir $HU_{3/4h}$ d'un $HU_{2/5h}$, il faut d'abord dériver HU_{2h} de $HU_{2/5h}$ (R = 5), puis $HU_{1/4h}$ de HU_{2h} (R = 8), et, enfin, $HU_{3/4h}$ de $HU_{1/4h}$ (R = 3), ce qui exige deux étapes, le maximum nécessaire quels que soient T et t. Il est évident que ces conversions peuvent être faites de diverses façons.

ÉTIREMENT DE LA PÉRIODE DE L'HYDROGRAMME UNITAIRE

En réagençant les termes de l'équation 4, nous obtenons :

$$V_n = (U_n - U_{n-R})/R + V_{n-1} \quad (5)$$

Les ordonnées U et V sont nulles au début et à la fin de leurs longueurs de base respectives, données par $T_c + t$ et $T_c + T$, où T_c est le temps de concentration. La valeur de T_c (7 h dans la figure 1) peut s'obtenir de la longueur de base connue de HU_t. Connaissant les valeurs de U et de R,

values can be computed. The ordinates with negative subscripts are zero. In this case, the ordinates U at t-hr intervals will be known.

DERIVATION OF SHORT DURATION UH FROM LONG DURATION UH

For this case, Equation 4 can be rearranged as

$$U_n = R(V_n - V_{n-1}) + U_{n-R} \qquad (6)$$

The value of T_c can be obtained from the known base length $T_c + T$. As the ordinates V and the ratio R are known, the ordinates U can be computed. The other conditions as explained above will apply. In this case, if the ordinates V at t-hr intervals are not known, then they will require interpolation at these intervals, preferably graphically by plotting the whole T-hr UH.

Equations 5 and 6 are the fundamental equations for deriving the UH. Although the S-hydrograph still remains a useful tool in engineering hydrology, its use for deriving UH is eliminated by these equations.

EXAMPLES

The formulas presented above have been tested over a wide range of UH. Table 1 gives some sample data obtained using a triangular UH of 1-hr duration with base length of 8 hr, lag time of 2.5 hr, time to peak equal to 3 hr, and unit peak equal to1 (cfs or m^3/s). The lag time is defined here as the time interval from the centre of rainfall excess to the peak of the hydrograph. The UH of durations 2-7 hr have been obtained by the conventional method of lag-and-add. An S-hydrograph, which attains an equilibrium flow of 4 (area of triangle divided by the unit duration), is also obtained after a time interval of 7 hr which is the time of concentration. By lagging the S-hydrograph through durations 1-7 hr, all the UH, including the original 1-hr UH, could be reproduced. Figure 2 gives the S-hydrograph and the 1-hr, 4-hr and 7-hr UH. It may be noted that the lag times of the 4-hr and 7-hr UH are 3 hr and 3.5 hr, respectively.

It shows that the lag time continues to increase until a maximum of one-half the time of concentration is

on peut déduire les valeurs de V. Les ordonnées à indices négatifs sont nulles. Dans ce cas, les ordonnées U à intervalles de t heures seront connues.

COMPRESSION DE LA PÉRIODE DE L'HYDROGRAMME UNITAIRE

Dans ce cas, on peut modifier l'équation 4 comme suit :

$$U_n = R(V_n - V_{n-1}) + U_{n-R} \qquad (6)$$

La valeur de T_c peut s'obtenir de la longueur de base connue $T_c + T$. Comme les ordonnées V et le quotient R sont connus, on peut calculer les ordonnées U. Les autres conditions, expliquées ci-dessus, s'appliquent. Dans ce cas, si les ordonnées V à intervalles de t heures ne sont pas connues, on devra les interpoler pour ces intervalles, de préférence graphiquement, par traçage de tout l'hydrogramme unitaire correspondant à T heures.

Les équations 5 et 6 sont fondamentales pour l'obtention de l'hydrogramme unitaire. Même si l'hydrogramme en S reste utile en hydrologie de l'ingénieur, il n'est plus nécessaire pour obtenir de nouveaux hydrogrammes unitaires, vu que l'on dispose de ces équations.

EXEMPLES

Les relations présentées ci-dessus ont été vérifiées pour une large gamme d'hydrogrammes unitaires. Le tableau 1 donne certaines données tirées d'un hydrogramme triangulaire correspondant à une durée de 1 h, la période de base étant de 8 h, le temps de réponse de 2.5 h, le temps de montée de 3 h et la pointe de l'hydrogramme correspondant à 1 (pi^3/s ou m^3/s). Le temps de réponse se définit comme l'intervalle de temps entre le centre de gravité de l'averse et la pointe de l'hydrogramme. Les hydrogrammes de durées de 2 à 7 h ont été obtenus par la méthode traditionnelle de sommation-décalage. On obtient aussi un hydrogramme en S qui atteint un débit d'équilibre de 4 (surface du triangle divisée par la durée unitaire) après un intervalle de 7 h qui correspond au temps de concentration. En décalant l'hydrogramme en S pour des durées de 1 à 7 h, on réussirait à reproduire tous les hydrogrammes, y compris l'hydrogramme original afférent à 1 h. La figure 2 donne l'hydrogramme en S ainsi que les hydrogrammes unitaires correspondant à 1 h, à 4 h et à 7 h. On notera que le temps de réponse des deux derniers hydrogrammes est respectivement de 3 h et de 3.5 h.

Il en ressort que le temps de réponse continue d'augmenter jusqu'à ce qu'on atteigne un maximum qui

Table 1. Sample Data on Unit Hydrographs and S-Hydrograph

Tableau 1. Données tirées d'hydrogrammes unitaires et de l'hydrogramme en S

Time interval (hr)/ Intervalle de temps (h)	1-hr UH/ HU_{1h}	2-hr UH/ HU_{2h}	3-hr UH/ HU_{3h}	4-hr UH/ HU_{4h}	5-hr UH/ HU_{5h}	6-hr UH/ HU_{6h}	7-hr UH/ HU_{7h}	S-hydrograph/ Hydrogramme en S
0	0	0	0	0	0	0	0	0
1	0.33	0.17	0.11	0.08	0.07	0.06	0.05	0.33
2	0.67	0.50	0.33	0.25	0.20	0.17	0.14	1.00
3	1.00	0.83	0.67	0.50	0.40	0.33	0.29	2.00
4	0.80	0.90	0.82	0.70	0.56	0.47	0.40	2.80
5	0.60	0.70	0.80	0.77	0.68	0.57	0.49	3.40
6	0.40	0.50	0.60	0.70	0.69	0.63	0.54	3.80
7	0.20	0.30	0.40	0.50	0.60	0.61	0.57	4.00
8	0	0.10	0.20	0.30	0.40	0.50	0.52	4.00
9	–	0	0.07	0.15	0.24	0.33	0.43	4.00
10	–	–	0	0.05	0.12	0.20	0.29	4.00
11	–	–	–	0	0.04	0.10	0.17	4.00
12	–	–	–	–	0	0.03	0.09	4.00
13	–	–	–	–	–	0	0.03	4.00
14	–	–	–	–	–	–	0	4.00

attained. No further increase is possible. Only if the initial triangular hydrograph is an isosceles triangle will the constancy of lag time equal to 0.5 T_C be maintained. In unit hydrograph theory, the time of concentration is an invariable quantity and a basic property of a drainage basin.

The suggested formulas can be tested using data given in Table 1. Two examples, one for each formula, are given in Tables 2 and 3. Table 2 presents the calculations for deriving a 6-hr UH from a given 1-hr UH, and Table 3 contains the calculations for deriving a 2-hr UH from a given 6-hr UH. For Table 2, t = 1 hr, T = 6 hr, R = 6, and T_C = 7 hr. For Table 3, t = 2 hr, T = 6 hr, R = 3, and T_C = 7 hr. In practice, it is convenient to divide the U ordinates or multiply the V ordinates by R before starting the computations.

The V and U values obtained in Tables 2 and 3 are essentially identical with the 6-hr UH and 2-hr UH values given in Table 1 with minor roundoff differences. This proves the validity of the formulas.

It must be emphasized that the results obtained by the formula will be identical with those obtained by the S-hydrograph method. It is immaterial whether the original UH has been derived from the recorded data or synthesized. Commonly, the S-hydrograph derived from the recorded data tends to fluctuate about the equilibrium flow.

correspond à la moitié du temps de concentration. Au-delà, aucun accroissement n'est possible. Ce n'est que si l'hydrogramme triangulaire initial est isocèle qu'on pourra maintenir la constance du temps de réponse égal à 0.5 T_C. Dans la théorie de l'hydrogramme unitaire, le temps de concentration est une constante et une propriété fondamentale du bassin versant.

Les relations proposées peuvent être vérifiées au moyen des données fournies au tableau 1. Deux exemples, un pour chaque relation, sont donnés aux tableaux 2 et 3. Le tableau 2 donne les éléments de calcul pour l'obtention d'un HU_{6h} à partir d'un HU_{1h}, tandis que le tableau 3 peut servir à tirer un HU_{2h} à partir d'un HU_{6h}. Dans le tableau 2, t = 1 h, T = 6 h, R = 6, et T_C = 7 h. Dans le tableau 3, t = 2 h, T = 6 h, R = 3, et T_C = 7 h. Dans la pratique, il est utile de diviser les ordonnées U ou de multiplier les ordonnées V par R avant d'entreprendre les calculs.

Les valeurs de V et de U obtenues dans les tableaux 2 et 3 sont essentiellement identiques aux valeurs des HU correspondant à 6 h et à 2 h dans le tableau 1, les écarts mineurs étant dus à l'arrondissement des chiffres. Cela prouve la validité des relations.

Précisons, pour que cela soit bien clair, que les résultats obtenus grâce à la relation seront identiques à ceux que donne la méthode de l'hydrogramme en S. Que l'hydrogramme unitaire d'origine ait été obtenu grâce à des données enregistrées ou par synthèse, cela n'a rien à voir. Ordinairement, l'hydrogramme en S obtenu à partir de données enregistrées tend à fluctuer autour du débit d'équilibre.

Table 2. Derivation of 6-hr UH from 1-hr UH

Tableau 2. Obtention d'un HU_{6h} à partir d'un HU_{1h}

Time interval (hr)/ Intervalle de temps (h)	n	U	U/R	V
0	0	0	0	0
1	1	0.33	0.06	0.06
2	2	0.67	0.11	0.17
3	3	1.00	0.17	0.34
4	4	0.80	0.13	0.47
5	5	0.60	0.10	0.57
6	6	0.40	0.07	0.64
7	7	0.20	0.03	0.61
8	8	0	0	0.50
9	9	–	–	0.33
10	10	–	–	0.20
11	11	–	–	0.10
12	12	–	–	0.03
13	13	–	–	0

Table 3. Derivation of 2-hr UH from 6-hr UH

Tableau 3. Obtention d'un HU_{2h} à partir d'un HU_{6h}

Time interval (hr)/ Intervalle de temps (h)	n	V	RV	U
0	0	0	0	0
2	1	0.17	0.51	0.51
4	2	0.47	1.41	0.90
6	3	0.64	1.92	0.51
8	4	0.50	1.50	0.09
10	5	0.20	0.60	0
12	6	0.03	0.09	–
14	7	0	0	–

Note: V is zero after 13 hr and U is zero after 9 hr.

Note : V est nul après 13 h et U l'est après 9 h.

Linsley *et al.* (1958) give several reasons for this, which include error in estimating the unit duration, non-uniform runoff generation during the unit duration, unusual areal distribution of rain, or errors in the basic data. These fluctuations are first smoothed out, usually by eye, before the desired UH is derived, to avoid getting negative or

Linsley et coll. (1958) donnent plusieurs explications à ce phénomène, y compris l'erreur d'estimation de la durée unitaire, la non-uniformité du débit durant la période unitaire, la répartition inhabituelle de l'averse sur la superficie du bassin ou des erreurs entachant les données de base. Ces fluctuations sont d'abord lissées, habituellement

Table 4. Derivation of Short Duration UH from Long Duration UH

Tableau 4. Compression de la période de l'hydrogramme unitaire

Time (hr)/ Temps (h) (1)*	6-hr UH/ HU_{6h} (2)*	Unadjusted S-hydrograph/ Hydrogramme en S sans réglage (3)	Adjusted S-hydrograph/ Hydrogramme en S avec réglage (4)*	Adjusted 2-hr UH/ HU_{2h} avec réglage (5)*	Unadjusted 2-hr UH from column (3)/ HU_{2h} sans réglage (colonne 3) (6)	2-hr UH from Equation 6/ HU_{2h} de l'équation 6 (7)	2-hr UH from column (4)/ HU_{2h} de la colonne 4 (8)*	Adjusted 2-hr UH (author)/ HU_{2h} avec réglage (auteur) (9)†
0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	4	4	4	12	12	12	12	12
4	14	14	14	30	30	30	30	30
6	31	31	31	51	51	51	51	51
8	54	58	58	81	81	81	81	81
10	86	100	100	126	126	126	126	126
12	126	157	157	171	171	171	171	171
14	154	212	212	165	165	165	165	165
16	146	246	246	102	102	102	102	123
18	118	275	275	87	87	87	87	99
20	99	311	311	72‡	108	108	108	81
22	84	330	330	60‡	57	57	57	66
24	72	347	347	54‡	51	51	51	57
26	60	371	371	48‡	72	72	72	48
28	51	381	381	42‡	30	30	30	39
30	42	389	389	36‡	24	24	24	33
32	34	405	405	30‡	48	48	48	27
34	27	408	408	24‡	9	9	9	21
36	21	410	410	18‡	6	6	6	15
38	16	421	415‡	12‡	33	33	15§	9
40	11	419	419	6‡	-6	-6	12§	6
42	7	417	420‡	3	-6	-6	3§	3
44	4	425	420‡	0	0	0	0§	0
46	2	421	421	–	–	–	–	–
48	0	417	421‡	–	–	–	–	–

Columns: (1) Time interval (hr)
(2) 6-hr UH ordinates
(3) Actual S-hydrograph obtained from column (2)
(4) S-hydrograph as adjusted by Linsley *et al.* (1958)
(5) 2-hr UH as adjusted by Linsley *et al.* (1958)
(6) Actual 2-hr UH as derived from column (3)
(7) Actual 2-hr UH as derived using Equation 6
(8) 2-hr UH as derived from adjusted S-hydrograph of column (4)
(9) 2-hr UH of column (7) as adjusted by the method suggested by author

* Data from Linsley *et al.* (1958), p. 204.
† All values in column (9) should be divisible by R, which is 3 in this case.
‡ Adjusted values.
§ Effect of S-hydrograph adjustment.

Note: Discharges are in 100 cfs.

Colonnes : (1) Intervalle de temps (h)
(2) Ordonnées de HU_{6h}
(3) Présent hydrogramme en S obtenu de la colonne (2)
(4) Hydrogramme en S obtenu par le réglage de Linsley et coll. (1958)
(5) HU_{2h} obtenu par le réglage de Linsley et coll. (1958)
(6) Présent HU_{2h} dérivé de la colonne (3)
(7) Présent HU_{2h} dérivé en utilisant l'équation 6
(8) HU_{2h} dérivé de l'hydrogramme en S avec réglage (colonne 4)
(9) HU_{2h} de la colonne (7) obtenu par réglage selon la méthode suggérée par l'auteur

* Données extraites de Linsley et coll. (1958), p. 204.
† Toutes les valeurs dans la colonne (9) devraient être divisibles par R, lequel correspond ici à 3.
‡ Valeurs réglées.
§ Effet du réglage de l'hydrogramme en S.

Note : Les débits sont en centaines de pieds cubes par seconde.

fluctuating values. In such cases the formula will give these negative or fluctuating values which can be smoothed out afterwards by plotting the whole derived UH, with the condition that it must contain the unit volume, its base must conform to the new unit duration, and all values must be positive. In fact, the same process can be carried out to derive a UH from a fluctuating S-hydrograph. It is unnecessary to smooth out the S-hydrograph first.

To illustrate this point further, the UH data given by Linsley *et al.* (1958, p. 204) are considered. These data are analyzed in Table 4. Some of the results given by Linsley *et al.* are taken as such for comparative purposes. Additional results have been obtained by further analysis of the data.

Column (8) in Table 4 shows the futility of smoothing out the S-hydrograph to obtain a smooth UH. The effect of smoothing is confined to the duration in which the original S-hydrograph has been smoothed. Also, the resulting data are not necessarily correct. The method of smoothing out the oscillating UH as suggested by the author gives acceptable results. Furthermore, from columns (6) and (7) it may be noted that the unit hydrographs as obtained by the actual S-hydrograph and by the author's formula are identical.

The data given in Table 4 are plotted on Figures 3 and 4. The oscillations of the S-hydrograph and those of the unit hydrographs are clear. The final unit hydrographs as adjusted by Linsley *et al.* (1958) (column 5) and as adjusted by the author (column 9) are also shown on these figures. It may be noted that column (5) yields a volume less than unity.

CONCLUSION

The recursion formula for deriving UH either from short duration to long duration or vice versa as developed in this paper is sound and can be easily applied. Thus, the need for constructing an S-hydrograph for this purpose is eliminated.

ACKNOWLEDGMENTS

Sincere thanks are due to W.O. Thomas, Jr., R. Condie and P. Pilon of the Hydrology Division, Water Resources Branch, for reviewing this manuscript. W.O.

à main levée, avant de tirer l'hydrogramme unitaire voulu, de façon à éviter les valeurs fluctuantes ou négatives. Dans ces cas, la relation donnera ces valeurs négatives ou fluctuantes, qui peuvent ultérieurement être lissées, au traçage de tout l'hydrogramme unitaire dérivé, à la condition qu'il représente le volume unitaire, que sa période de base soit conforme à la nouvelle durée unitaire et que toutes les valeurs soient positives. Enfin, on peut utiliser le même procédé pour tirer un hydrogramme unitaire d'un hydrogramme en S fluctuant. On peut se passer de lisser au préalable la courbe de l'hydrogramme en S.

Les données HU de Linsley et coll. (1958, p. 204) peuvent servir à illustrer davantage ce cas particulier. On trouve au tableau 4 l'analyse de ces données. Dans cette comparaison, certains résultats de Linsley et coll. sont reproduits sans aucune modification; par contre, certains autres sont obtenus grâce à une analyse plus élaborée de ces données.

La colonne 8 du tableau 4 montre que le lissage de l'hydrogramme en S est inutile dans l'obtention d'un HU lisse. Le lissage n'a d'effet que pendant le temps où on lisse l'hydrogramme en S initial. On remarque aussi que les données que l'on obtient ne sont pas nécessairement bonnes. La méthode de lissage du HU oscillatoire, que propose l'auteur, donne des résultats acceptables. En outre, les colonnes (6) et (7) montrent que les hydrogrammes unitaires, obtenus par le présent hydrogramme en S et par la formule de l'auteur, sont identiques.

Les figures 3 et 4 représentent les données du tableau 4. On distingue clairement les oscillations de l'hydrogramme en S et celles des hydrogrammes unitaires. Ces figures montrent aussi les hydrogrammes unitaires finaux tels qu'ils sont obtenus par le réglage de Linsley et coll. (1958) (colonne 5) et par celui de l'auteur (colonne 9). La colonne (5) montre que le débit est inférieur au volume unitaire.

CONCLUSION

La formule ou relation de récurrence qui permet désormais de comprimer ou d'étirer la période des hydrogrammes unitaires est éprouvée. On peut donc se passer de construire des hydrogrammes en S à cette fin.

REMERCIEMENTS

Nous remercions sincèrement W.O. Thomas Jr, R. Condie et P. Pilon de la Division de l'hydrologie, Direction des ressources en eau, qui ont révisé notre manuscrit.

Thomas, Jr., was on an executive exchange program from the U.S. Geological Survey and was the Chief of the Hydrology Division during the period July 1, 1984, to August 31, 1985.

Détaché de l'U.S. Geological Survey en vertu d'un programme d'échanges des cadres, W.O. Thomas Jr fut chef de la Division de l'hydrologie du 1er juillet 1984 jusqu'au 31 août 1985.

REFERENCES

Chow, Ven Te (Editor-in-Chief). 1964. *Handbook of Applied Hydrology*. Section 14, Runoff, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y.

Linsley, R.K., M. Kohler and J.L.H. Paulhus. 1958. *Hydrology for Engineers*. McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y., pp. 200–204.

Sherman, L.K. 1932. Streamflow from rainfall by the unit-graph method. Eng. News Rec. 108: 501–505.

RÉFÉRENCES

Chow, Ven Te (rédacteur en chef). 1964. *Handbook of Applied Hydrology*. Section 14, Runoff, McGraw-Hill Book Co., Inc., New York, N.Y.

Linsley, R.K., M.A. Kohler et J.L.H. Paulhus. 1958. *Hydrology for Engineers*. McGraw-Hill Book Co. Inc., New York, N.Y., pp. 200–204.

Sherman, L.K. 1932. Streamflow from rainfall by the unit-graph method. Eng. News Rec. 108: 501–505.

APPENDIX A

COMPOSITE HYDROGRAPH

ANNEXE A

HYDROGRAMME COMPOSÉ

Equation 2 can be used to obtain the ordinates of a composite hydrograph. The equation is

$$Q'_n = q_1 U_n + q_2 U_{n-1} + q_3 U_{n-2} + \ldots + q_m U_{n-m+1} \qquad (A.1)$$

where Q'_n = nth ordinate of the composite hydrograph

U_n = nth ordinate of the t-hr UH

q_m = incremental runoff in the mth interval of unit duration t

m = total number of runoff increments.

Equation A.1 can be used for computing Q′ if q and U are known (construction of a design flood hydrograph) or for computing U if Q′ and q are known (derivation of a UH from complex storms).

L'équation 2 peut servir à calculer les ordonnées d'un hydrogramme composé. L'équation est la suivante :

$$Q'_n = q_1 U_n + q_2 U_{n-1} + q_3 U_{n-2} + \ldots + q_m U_{n-m+1} \qquad (A.1)$$

où Q'_n = la $n^{ième}$ ordonnée de l'hydrogramme composé

U_n = la $n^{ième}$ ordonnée de l'hydrogramme unitaire correspondant à t heures

q_m = l'accroissement du ruissellement dans le $m^{ième}$ intervalle de la durée unitaire t

m = le nombre total d'accroissements du ruissellement.

L'équation A.1 peut servir au calcul de Q′ si q et U sont connus (construction d'un hydrogramme de crue nominale) ou au calcul de U si Q′ et q sont connus (obtention d'un hydrogramme unitaire d'orages complexes).

APPENDIX B

ELIMINATION OF OSCILLATIONS IN S-HYDROGRAPH AND DERIVED UH

ANNEXE B

ÉLIMINATION DES OSCILLATIONS DE L'HYDROGRAMME EN S ET DE L'HYDROGRAMME UNITAIRE DÉRIVÉ

The problem of oscillations in S-hydrographs has been discussed in this report. No solution to this problem exists. This appendix, however, gives a simple technique to eliminate these oscillations. Examples are provided to avoid detailed explanations.

If a T-hr UH is defined at T-hr intervals only, the S-hydrograph obtained from it will be oscillation free. However, if a T-hr UH is defined at smaller intervals, say ΔT, then the S-hydrograph obtained from it could oscillate. For example, consider the data given in Table 4. A 6-hr UH is defined at 2-hr intervals. The S-hydrograph as shown in column 3 fluctuates. The reason for these fluctuations is as follows. If we derive three independent S-hydrographs using data at 0,6,12...hr; 2,8,14...hr; and 4,10,16...hr, they yield equilibrium flows of 417, 425 and 421. If these flows were identical and equal to the true equilibrium flow, the S-hydrograph would not fluctuate. The true equilibrium flow can be obtained by dividing the volume under the UH by the unit duration, which in the present case results in a value of 421. This value is also equal to the average of equilibrium flows of three independent S-hydrogaphs, that is, average of 417, 425 and 421.

Nous avons discuté, dans ce rapport, du problème que posent les oscillations dans les hydrogrammes en S. À ce problème, il n'existe aucune solution. Cependant, dans la présente annexe, on trouvera exposée une technique simple qui permet d'éliminer ces oscillations. Des exemples permettent de se passer d'explications détaillées.

Si un HU_T est défini seulement à intervalles de T h, l'hydrogramme en S qu'on en tire sera sans oscillation. Cependant, si HU_T est défini à intervalles plus courts, ΔT par exemple, alors l'hydrogramme en S qu'on en tire pourrait osciller. Par exemple, soit les données du tableau 4. Un HU_{6h} est défini à intervalles de 2 h. L'hydrogramme en S, dont les valeurs sont données dans la colonne 3, fluctue. Les raisons de ces fluctuations sont les suivantes. Si nous tirons trois hydrogrammes en S indépendants à l'aide des données correspondant à 0, à 6, à 12. . .h; à 2, à 8, à 14. . .h; et à 4, à 10, à 16. . .h, leur débit à l'équilibre est de 417, de 425 et de 421. Si ces débits étaient identiques et égaux au véritable débit à l'équilibre, l'hydrogramme en S ne fluctuerait pas. Le véritable débit à l'équilibre peut être obtenu par division du volume sous l'hydrogramme unitaire par la durée unitaire, ce qui, dans le cas présent, donne une valeur de 421. Cette valeur égale aussi la moyenne des débits à l'équilibre des trois hydrogrammes en S indépendants, c'est-à-dire, la moyenne de 417, de 425 et de 421.

ELIMINATION OF OSCILLATIONS

The S-hydrograph oscillations are stabilized at the time of concentration after which their amplitude becomes constant. The period is equal to the unit duration. These oscillations can be of various shapes – concave upward, concave downward, zig-zag, irregular polygons, etc. The number of individual flows constituting an oscillation is $T/\Delta T$. The average of these flows is also equal to the true equilibrium flow of the S-hydrograph. The simple technique of eliminating these oscillations is as follows:

(1) Adjust the individual flows within one oscillation to their equilibrium value by the process of addition and subtraction.

ÉLIMINATION DES OSCILLATIONS

On stabilise les oscillations de l'hydrogramme en S au temps de concentration après quoi leur amplitude devient constante. La période est égale à la durée unitaire. Ces oscillations peuvent être multiformes (concaves, convexes, en dents de scie, polygones irréguliers, etc.). Le nombre de débits individuels constituant une oscillation est de $T/\Delta T$. La moyenne de ces débits est aussi égale au débit véritable à l'équilibre de l'hydrogramme en S. La technique qui permet d'éliminer simplement ces oscillations est comme suit :

(1) Régler les débits individuels à l'intérieur d'une oscillation à leur valeur à l'équilibre, par addition et soustraction.

(2) Add or subtract these changes to or from UH flows at corresponding points.

(3) Corresponding points are points separated from one another by integral multiples of unit duration.

(4) Any number of adjustments can be made as long as the cumulative effect of all adjustments is equal to the adjustment required by flows in one oscillation.

(5) All adjustments should preferably be made in the recession limb of the UH and as near the peak as possible.

(6) The rising limb and the peak flow may not be adjusted if the UH has been derived from recorded data, as any change in peak flow may not be desirable.

(7) Sometimes, to avoid too much distortion of UH, changes in reverse order may be necessary. That is, in a 6-hr UH defined at 2-hr intervals, changes at 12, 10 and 8 hr are equivalent to changes at 6, 8, and 10 hr, as 6 and 12 hr are corresponding points.

(8) In most cases, only one adjustment will be required to eliminate oscillations of both the S-hydrograph and the derived UH.

The method is explained in Table B-1. The 6-hr UH data given in column 2 of Table 4 have been first adjusted at 18, 20 and 22 hr by +4, -4 and 0. These adjustment values have been obtained by subtracting from 421 the oscillating flows 417, 425 and 421 which occur at 42, 44 and 46 hr.

As columns 3 and 4 show, the oscillations of both the S-hydrograph and the UH have been eliminated. In column 5, the flow adjustments have been carried over six time periods from 18-28 hr in two groups of +2, -2 and 0. These adjustments eliminate the oscillations of the S-hydrograph (column 6) but fail to eliminate those of the UH (column 7) where flow reversal at 18 hr still persists. Finally, even after the oscillations have been eliminated, further smoothing by eye of the S-hydrograph as well as of the UH may be necessary.

(2) Aux débits ou des débits de l'HU, additionner ou soustraire respectivement, ces écarts, aux points correspondants.

(3) Les points correspondants sont des points séparés l'un de l'autre par des multiples entiers de la durée unitaire.

(4) On peut faire le nombre de réglages qu'on veut tant que l'effet cumulatif de ces réglages égale le réglage exigé par les débits dans une oscillation.

(5) Tous les réglages devraient de préférence être faits dans la branche descendante de l'HU ou le plus près possible du sommet.

(6) La branche ascendante et le débit de pointe ne peuvent pas être réglés si l'HU a été obtenu de données enregistrées, car il peut ne pas être souhaitable de modifier le débit de pointe.

(7) Parfois, pour éviter une distorsion excessive de l'HU, il peut être nécessaire d'opérer des changements dans l'ordre inverse. C'est-à-dire, dans un HU_{6h} défini à intervalles de 2 h, des modifications à 12, à 10 et à 8 h équivalent à des modifications à 6, à 8 et à 10 h, les points correspondants se trouvant à 6 et à 12 h.

(8) Dans la plupart des cas, un seul réglage suffit à éliminer les oscillations de l'hydrogramme en S et l'hydrogramme unitaire qui en dérive.

La méthode est expliquée au tableau B-1. Les données se rapportant à l'HU_{6h}, dans la colonne 2 du tableau 4, ont d'abord été réglées de +4, de -4 et de 0, à 18, à 20 et à 22 h respectivement. Ces réglages ont été obtenus par soustraction de la valeur 421 des débits oscillants de 417, de 425 et de 421 qui surviennent respectivement à 42, à 44 et à 46 h.

Comme les colonnes 3 et 4 le montrent, les oscillations de l'hydrogramme en S et de l'hydrogramme unitaire ont été éliminées. Dans la colonne 5, les réglages du débit ont été reportés sur six périodes de temps, de 18 à 28 h, en deux groupes de +2, de -2 et de 0. Ces réglages éliminent les oscillations de l'hydrogramme en S (colonne 6), mais ne parviennent pas à éliminer celles de l'HU (colonne 7) où une inversion du débit persiste à 18 h. Enfin, même après élimination des oscillations, il peut être nécessaire de lisser l'hydrogramme en S de même que l'HU, à main levée.

Table B-1. Elimination of Oscillations in S-hydrograph and Derived UH

Tableau B-1. Élimination des oscillations de l'hydrogramme en S et de l'hydrogramme unitaire dérivé

Time (hr)/ Temps (h) (1)	Adjusted 6-hr UH (one adjustment)/ HU_{6h} (après un réglage) (2)	Oscillation free S-hydrograph/ Hydrogramme en S sans oscillation (3)	Oscillation free 2-hr UH/ HU_{2h} sans oscillation (4)	Adjusted 6-hr UH (two adjustments)/ HU_{6h} (après deux réglages) (5)	Oscillation free S-hydrograph/ Hydrogramme en S sans oscillation (6)	2-hr UH (oscillations persist)/ HU_{2h} (les oscillations persistent) (7)
0	0	0	0	0	0	0
2	4	4	12	4	4	12
4	14	14	30	14	14	30
6	31	31	51	31	31	51
8	54	58	81	54	58	81
10	86	100	126	86	100	126
12	126	157	171	126	157	171
14	154	212	165	154	212	165
16	146	246	102	146	246	102
18	122 (118+4)*	279	99	120 (118+2)*	277	93†
20	95 (99-4)*	307	84	97 (99-2)*	309	96
22	84 (84-0)*	330	69	84 (84-0)*	330	63
24	72	351	63	74 (72+2)*	351	63
26	60	367	48	58 (60-2)*	367	48
28	51	381	42	51 (51-0)*	381	42
30	42	393	36	42	393	36
32	34	401	24	34	401	24
34	27	408	21	27	408	21
36	21	414	18	21	414	18
38	16	417	9	16	417	9
40	11	419	6	11	419	6
42	7	421	6	7	421	6
44	4	421	0	4	421	0
46	2	421		2	421	
48	0	421		0	421	

*Adjusted values.
†Oscillation in UH.

*Valeurs réglées.
†Oscillation dans l'hydrogramme unitaire.